משפט 1: עץ שמתאים לקוד אופטימלי הוא מלא.

משפט 2: לעלה עמוק ביותר בעץ אופטימלי יש אח עלה.

משפט 3:



**הוכחה למשפט 3:** נביט בעץ T' בו מוחלפים העלים u ו-v.

<=

חיובי שלילי?

מהנתון

ומכיוון ו-T ממזער את הABL אנחנו יודעים כי

ומכאן חייב להתקיים

כנדרש.

**הוכחה נכונות לאלגוריתם של הופמן:**

**משפט:** האלגוריתם של הופמן מחזיר עץ המתאים לקידוד תחיליות אופטימלי.

**הוכחה:**

נוכיח באינדוקציה על גודל הא"ב |S|.

בסיס: אז ודאי שהאלגוריתם יחזיר עץ אופטימלי.

נניח שלא"ב בגודל קטן מ-k האלגוריתם מחזיר עץ קידודים אופטימלי ויהי S א"ב בגודל k גדול מ-2.

האלגוריתם לוקח את שתי האותיות x,y עם השכיחות הנמוכה ביותר הוא בונה א"ב חדש S’ אשר נמחקות ממנו x,y ונוספת אות חדשה w אשר שכיחותה הוא f(x)+f(y).

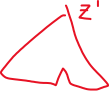
האלגוריתם בונה עץ T’ עבור S’ ולפי הנחת האינדוקציה זהו עץ אופטימלי

בסוף ריצת האלגוריתם נבנה עץ T ע"י לקיחת T' והוספת העלים x ו-y תחת העלה w.

**ט"ע:** יהי עץ T ו-x,y שני עלים בו. אם T' הינו עץ זהה ל-T פרט לכך שבו נמחקים שני העלים x ו-y והאב שלהם מקבל אות המתאימה לשכיחות f(x)+f(y) אז מתקיים:

אם בשלילה T הוא לא עץ אופטימלי ולכן קיים עץ Z המקיים:

*לפי משפט 1 Z הוא עץ מלא ולפי משפט 2 נוכל להביט ב-Z כזה בו ישנם שני עלים עמוקים ביותר אחים ובה"כ הם x,y (בעזרת משפט 3). נגדיר עץ חדש Z’ ע"י הסרת x ו-y מ-Z והגדרת אביהם בתדירות f(x)+f(y).*



*ABL(Z)<ABL(T)\**

*לפי ה"א \*\*ABL(Z’)ABL(T’)*

*נשתמש בט"ע ונקבל:*

*נקבל מ-\*:*

*נצמצם את האגפים ונקבל:*

*סתירה ל\*\*.*

***הוכחת ט"ע-***

*לסיכום:*

משפט 1: עץ שמתאים לקוד אופטימלי הוא מלא.

משפט 2: לעלה עמוק ביותר בעץ אופטימלי יש אח עלה.

משפט 3:



*ט"ע: ההפרש בין T ל-T' הוא f(w)*

***אלגוריתם לקידוד תחילי טרינרי***

*נחלק למקרים:*

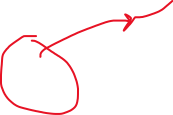
*מקרה 1)*

*קיים קודקוד עם בן יחיד. הוכחה כמו במקרה הקודם.*

*מקרה2) אחרת, יש לנו קודקוד עם שני בנים בלבד.*

*נראה כי בהכרח קיים קודקוד נוסף עם שני בנים בלבד.*

*נוכיח כי עם יש קודקוד יחיד עם שני בנים בעץ טרינרי אז מספר העלים הוא זוגי.*



***טענה:*** *בעץ טרינרי מלא ישנם מספר א"ז של עלים.*

***הוכחה:*** *באינדוקציה על מספר הקודקודים.*

*בסיס: קודקוד יחיד מתקיים.*

*נניח שעבור מספר קודקודים קטנים מ-k הטענה מתקיימת*

*ויהי עץ טרינרי מלא עםk קודקודים.*

*נביט בעלה עמוק ביותר מכיוון והעץ מלא יש לו שני אחים בהכרח הם עלים (אחרת סתירה לעומק). נסיר את שלושת האחים-עלים ונקבל עץ טרינרי שעונה לה"א. ההבדל בין שני העצים הם 2 עלים ולכן גם העץ המקורי שלנו מכיל מספר א"ז של עלים.*